МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
СЕВЕРО-ВОСТОЧНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.К. АММОСОВА
Якутское отделение Регионального научно-образовательного математического центра
«Дальневосточный центр математических исследований»

VIII Всероссийская студенческая олимпиада (ВСО) по математике с международным участием в 2022-2023 учебном году

Составители:
Верховцев Семен Дмитриевич
Федотов Егор Дмитриевич
Шарин Евгений Федорович

Якутск 2023г.

VIII Всероссийская олимпиада студентов образовательных организаций высшего образования (ВСО) в 2022-2023 году

1. Найдите предел

$$\lim_{n\to 0^+}\left(\frac{17^n+119^n}{2}\right)^{1/n}.$$

2. Найти 6 точек на плоскости, не лежащих на одной прямой, таких что расстояние между любыми двумя из них является целым числом.

3. Пусть $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, а также $a, b \in \mathbb{C}/\{0\}$ и $a \neq b$. Найдите $det(A-B)$, если известно что

$$AB = aA + bB,$$
$$BA = bA + aB.$$

4. Вычислите интеграл

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{z^{n-1}}{2z^n+1}dz, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. Пусть x, y - натуральные числа, $\{a_n\}$ - последовательность:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1+2y,\ a_3 = 1+3x+3y,$$
$$a_{n+3} = xa_n + ya_{n+1} + a_{n+2},\ \text{для } n \geq 1.$$

Докажите что для любого p-простого, $a_p - 1$ делится на p.

6. Пусть f - ограниченная функция, заданная на отрезке $[0,2]$ и удовлетворяющая неравенству

$$f(t+h) \geq h\left(f(t)^2 + f(t)\right) + 1,$$

для любых $t, h \geq 0,\ t+h \leq 2$. Найдите $f(t)$.

7. Докажите, что существует бесконечно много пар (m,n) натуральных чисел m, n, таких что

$$\frac{n}{m} + \frac{m+1}{n}$$

является натуральным числом.

Решение задач

Решение задачи 1.

$$\lim_{n\to 0^+}\left(\frac{17^n+119^n}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to 0^+}\left(1+\frac{17^n-1+119^n-1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to 0}\frac{17^n-1}{2n}+\lim\limits_{n\to 0}\frac{119^n-1}{2n}}=e^{\ln\sqrt{17\cdot 119}}=\sqrt{2023}$$

Критерии

- Несущественные арифметические ошибки - 5 баллов.
- Есть ошибки, но в целом верное решение - 4 балла.

Решение задачи 2.
Возьмем пять разных пифагоровых троек, соответствующих пяти разным прямоугольным треугольникам с общим катетом a:

$$\begin{aligned} a^2+b_1^2&=c_1^2,\\ a^2+b_2^2&=c_2^2,\\ a^2+b_3^2&=c_3^2,\\ a^2+b_4^2&=c_4^2,\\ a^2+b_5^2&=c_5^2. \end{aligned}$$

Этого всегда можно добиться, например, рассмотрев пять разных примитивных пифагоровых троек, а затем взять подобные им пифагоровы тройки с подходящими коэффициентами подобия.

Точки $(a,0)$ и $(0,b_1)$, $(0,b_2)$, $(0,b_3)$, $(0,b_4)$, $(0,b_5)$ удовлетворяют условию, так как попарные расстояния между точками $(0,b_i)$ очевидно целые, а расстояния между $(a,0)$ и $(0,b_i)$ также равны целым числам $\sqrt{a^2+b_i^2}=c_i$.

Решение задачи 3.
Заметим, что система уравнений симметрична, относительно искомых матриц (A,B). Для начала давайте возведем в квадрат одно из уравнений.

$$\begin{aligned} A\underline{BA}B &= A(bA+aB)B = bA^2B+aAB^2 = \\ &= bA(aA+bB)+a(aA+bB)B = abA^2+b^2AB+a^2AB+abB^2 = \\ &= ab(A^2+B^2)+(a^2+b^2)AB \end{aligned}$$

$$ABAB=(aA+bB)^2=a^2A^2+b^2B^2+abAB+abBA.$$

Далее воспользуемся симметрией относительно замены $A\leftrightarrow B$. Тогда получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} a^2A^2+b^2B^2+abAB+abBA&=ab(A^2+B^2)+(a^2+b^2)AB\\ a^2B^2+b^2A^2+abBA+abAB&=ab(A^2+B^2)+(a^2+b^2)BA. \end{aligned}$$

Просуммировав их мы получим

$$(a^2+b^2)(A^2+B^2)+2ab(AB+BA)=2ab(A^2+B^2)+(a^2+b^2)(AB+BA)$$
$$(a-b)^2(A^2+B^2)=(a-b)^2(AB+BA).$$

В силу того, что $a\neq b$ получим, что $A^2+B^2=AB+BA$ или же $(A-B)^2=0$. Откуда следует, что $det(A-B)=0$.

Критерии

- Если пропущено обоснование существенного момента - 5 баллов.
- Есть существенные ошибки, но прослеживается логика решения - 3 балла.
- Если есть вычисление матриц вида ABA или BAB - 2 балла.
- Явное или неявное решение через обратную матрицу - 1 балл.

Решение задачи 4.
Заметим, что если $f(z)=2z^n+1$, тогда

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{z^{n-1}}{2z^n+1}dz=\frac{1}{2n}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Пусть $f(z)$ имеет корень a порядка k. Тогда $f(z)=(z-a)^k g(z)$, $g(a)\neq 0$, откуда получаем, что

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{k}{z-a}+\frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Или же интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=n \text{ - количество корней } f(z) \text{ внутри кривой } |z|=1.$$

Откуда получаем, что искомый интеграл равен πi.

Критерии

- Существенные ошибки в вычислении интеграла при верном ходе решения - 4 балла.

Решение задачи 5.
Рассмотрим матрицу

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\x&y&1\end{pmatrix}.$$

Заметим, что характеристический многочлен этой матрицы такой же как и у данной рекуррентной последовательности и равен $\lambda^3-\lambda^2-y\lambda-x$. Явно вычислим и покажем, что

$$Tr\left(A\right)=1,\ Tr\left(A^2\right)=1+2y,\ Tr\left(A^3\right)=1+3x+3y.$$

По теореме Гамильтона-Кэли мы получаем, что $A^3=A^2+yA+xE$. Или же

$$a_{n+3}=a_{n+2}+ya_{n+1}+xa_n=Tr\left(A^{n+3}\right)=Tr\left(A^{n+2}\right)+yTr\left(A^{n+1}\right)+xTr\left(A^n\right).$$

Откуда видим, что $a_n=Tr\left(A^n\right)$ для любого натурального n. Так как $Tr\left(A\right)=1$, то следующая теорема завершает доказательство.

Теорема В.И. Арнольда о матричном аналоге малой теоремы Ферма[1], которую мы докажем, говорит о том что

$$Tr\left(A^p\right)\equiv Tr\left(A\right)\ (mod\ p),\ \forall A\in M_{n\times n}\left(\mathbb{Z}\right).$$

Доказательство. Обобщая $Tr\left(XY\right)=Tr\left(YX\right)$ выходит что $Tr\left(X_1\dots X_n\right)=Tr\left(X_{\alpha_1}\dots X_{\alpha_n}\right)$, для любой циклической перестановки α_i. Что дает нам

$$\sum_{\text{по всем цикл.}}Tr\left(X_1X_2\dots X_n\right)=nTr\left(X_1X_2\dots X_n\right)$$

Тогда

$$Tr\left(X+Y\right)^p=\sum_{X_1,X_2\dots,X_p\in\{X,Y\}}Tr\left(X_1X_2\dots X_p\right)\equiv Tr\left(X^p\right)+Tr\left(Y^p\right)\ (mod\ p).$$

Аналогично будет и верна

$$Tr\left(X_1+\dots+X_n\right)^p\equiv Tr\left(X_1^p\right)+\dots+Tr\left(X_n^p\right)\ (mod\ p).$$

Разлагая матрицу по единичным матрицам E_{ij}, у которого единица на позиции i,j и нули на остальных, мы получим

$$Tr\left(X^p\right)=Tr\left(\sum_{i,j=1}^n x_{ij}E_{ij}\right)^p\equiv Tr\left(\sum_{i,j=1}^n x_{ij}^pE_{ij}^p\right)\equiv\sum_{i=1}^n x_{ii}^p\equiv\sum_{i=1}^n x_{ii}\equiv Tr\left(X\right)\ (mod\ p).$$

Решение задачи 6.

Заметим, что $f(0)\geq 1$ при $t=h=0$ и $f(1)\geq 3$ при $t=0,h=1$. Пусть $a_n=f(2-2^{-n})$, тогда

$$a_{n+1}=f(2-2^{-n}+2^{-n-1})\geq 2^{-n-1}(f(2-2^{-n})^2+f(2-2^{-n}))+1=2^{-n-1}(a_n^2+a_n)+1.$$

Мы получаем рекуррентное неравенство

$$a_{n+1}\geq 2^{-n-1}(a_n^2+a_n)+1,\quad a_0=f(2-1)\geq 3,$$

где расписав несколько первых членов, можем придти к гипотезе, что $a_n\geq 2^{n+2}-1$. Прямой подстановкой убеждаемся, что гипотеза верна.

Тогда выходит, что функция $f(x)$ неограниченна на отрезке $[0,2]$ или же решений нет.

[1] В. И. Арнольд. Динамика Ферма, арифметика матриц, конечная окружность и конечная плоскость Лобачевского// Функц. анализ и его прил., 2004, том 38, выпуск 1, 1–15. https://doi.org/10.4213/faa92

- Доказано, что функция не является ограниченной - 7б.
- Рассуждения о свойствах функции, которые ошибочны, либо не приводят к противоречию - нуль баллов.

  (свойства, например $f(0) \geq 1$ и другие, не оцениваются ввиду того, что эти свойства не указывают на неограниченность функции).

Решение задачи 7.

Доказательство. Преобразуем уравнение

$$\frac{n}{m} + \frac{m+1}{n} = 3$$

к виду

$$n^2 - 3mn + m^2 + m = 0. \tag{1}$$

Если n является корнем уравнения (1) при фиксированном m, то таковым же является и $n' = 3m - n$, потому что по теореме Виета корни в сумме дают $n + n' = 3m$. Аналогично, если m является корнем уравнения при фиксированном n, то таковым же является $m' = 3n - 1 - m$.

Существование бесконечного количества решений теперь следует из того, что итерация указанных формул для m' и n', начиная, к примеру, с $(1, 1)$, приводит к неограниченному, а потому бесконечному, множеству решений. В самом деле, переход $(n, m) \to (n', m)$ при $m \geq n$, а также переход $(n, m) \to (n, m')$ при $n \geq m$ приводят к "бóльшим" решениям, так как, например, в первом переходе $n' > n$, поскольку $3m - n \geq 3n - n = 2n > n$, ч.т.д.

Описанный подход приводит к решениям $(n, m) = (1, 1), (2, 1), (2, 4), (10, 4), (10, 25), \ldots$.

Критерии

- Выписаны формулы Виета по одной переменной - 4 балла.